Fiche révisions : Géométrie plane et produit scalaire dans le plan

1ère S - Mathématiques

www.rvgs.fr

Première partie
Géométrie plane et vecteurs

1 Droites d'un plan

1.1 Les équations de droite

Il existe deux types d'équations qui permettent de décrire une droite dans le plan : **l'équation réduite** ou **l'équation cartésienne**.

1.1.1 Équation réduite de droite Δ

$$\boxed{\Delta : y = mx + p}$$

On dit alors que m est le **coefficient directeur** de la droite et p l'ordonnée à l'origine car il s'agit de l'ordonnée du point d'intersection entre la droite et l'axe des ordonnées.

1.1.2 Équation cartésienne de droite Δ

$$\boxed{\Delta : ax + by + c = 0}$$

On a alors $(a, b) \neq (0, 0)$

1.2 Intersection de deux droites

Soient deux droites Δ et Δ' :

$$\Delta : ax + by + c = 0$$

$$\Delta' : a'x + b'y + d = 0$$

- Elles sont sécantes si, et seulement si, $ab' \neq a'b$
- Elles sont parallèles si, et seulement si, $ab' = a'b$

Si elles sont sécantes, trouver le point d'intersection I(x ;y) entre elles revient à résoudre le système (S) :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + d = 0 \end{cases}$$

1.3 Vecteurs directeurs de droite

Soient A, un point du plan et $\vec{v}$, un vecteur non nul, une droite passant par A et ayant pour **vecteur directeur** $\vec{v}$ est l'ensemble des points M(x ;y) tels que :

$$\boxed{\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{v}}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Propriété Si $\Delta : ax + by + c = 0$ possède un vecteur directeur $\vec{u}$, alors $\vec{u}(-b; a)$

1.4 Vecteur normal de droite

La droite Δ possède un vecteur normal $\vec{v}$ (orthogonal), tel que $\vec{v}(a; b)$.

2 Vecteurs d'un plan

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors il existe un réel λ tel que :

$$\boxed{\vec{u} = \lambda\vec{v}}$$

Deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires si, et seulement si :

$$\boxed{xy' - x'y = 0}$$

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
Soit un point A du plan et un vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Deuxième partie

Produit scalaire dans le plan

1 Définition et formules

1.1 Définition

Le produit scalaire entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ s'écrit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
Définition :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}}$$

Avec H, le point d'intersection entre la droite (AB) et sa perpendiculaire passant par C. On dit alors que H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Propriété : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

1.2 Formules du produit scalaire

Soient $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2)$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times cos(\vec{u},\vec{v})$$

2 Théorème de la médiane

Soit deux points donnés A et B. Soit O, le milieu de [AB]. Quelque soit le point M du plan on a :

$$\boxed{MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2}}$$

3 Équation de cercle

Le cercle de centre A(a ;b) et de rayon R est l'ensemble des points M(x ;y) tels que AM=R, c'est-à-dire $AM^2 = R^2$ soit :

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$$