Fiche approfondissement : Bases de logique mathématique - La relation d'équivalence et l'équivalence logique

Terminale S - Mathématiques

www.rvgs.fr

1 Introduction

1.1 La logique mathématique

Les mathématiques que nous connaissons aujourd'hui se basent sur des principes régis par la **logique mathématique**. Cette dernière implique des notions de base :

— On définit un **système logique** par des **formules ou** « **faits** » , par des **déductions** et par une **interprétation des formules** qui définissent si elles sont vraies ou fausses.

Cette fiche a pour public les plus curieux des terminales S en mathématiques puisqu'elle propose une cohérence globale, certes réduite, mais bonne à prendre sur les notions que l'on manipule au quotidien sans forcément les comprendre.

1.2 La proposition mathématique

Il s'agit de plusieurs objets mathématiques liés par des **relations mathématiques (voir section 2)**. Elle peut également être composée de plusieurs **propositions mathématiques liées par des connecteurs (voir section 3)**. Un proposition mathématique peut être **vraie** ou **fausse** dans un **ensemble E**.

Par exemple :

$$2 = 3$$

Il s'agit d'une relation **binaire** puisqu'elle met en jeu deux objets mathématiques : 2 et 3, et qui qui utilise la relation **d'égalité** $=$. Par exemple, elle est **fausse** dans $\mathbb{R}$.

2 Les relations mathématiques

La **relation mathématique** lie des **objets mathématiques** et forme une **propriété** (proposition). Un relation est souvent **binaire** car elle met en jeu deux objets.

2.1 Quelques exemples

$<$ est une relation binaire, on l'appelle « relation d'ordre stricte », elle met en relation deux nombres.

$\in$ est une relation binaire, on l'appelle « relation d'appartenance », elle met en relation un nombre et un ensemble.

Dire que le point A est entre B et C (sur la droite passant par B et C) est une relation ternaire car elle met en relation trois objets. Mais elle peut être ramené en une relation binaire à l'aide d'une autre relation : $A \in [BC]$

2.2 La relation d'équivalence

C'est une relation **binaire** notée $\sim$ dont la plus élémentaire est **l'égalité**.

Un relation R est une relation **d'équivalence** dans un ensemble E si elle est :

— **symétrique** : $\forall x \in E, \forall y \in E, xRy \Leftrightarrow yRx$,

— **réflexive** : $\forall x \in E, xRx$,

— **transitive** : $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$. $\wedge$ signifie « et », voir section **3.3**

Exemple : La relation de **congruence** est une relation d'équivalence. On dit qu'un objet est « équivalent à » un autre.

3 Les connecteurs inter-proposition

Il est possible de connecter des propositions entre elles à l'aide de **connecteurs** dont les principaux sont les suivants, à chaque cas on considère deux proposition P et Q, vraies ou fausses, simultanément ou non dans un ensemble E :

3.1 La disjonction logique

Elle se note $P \vee Q$, il s'agit d'une proposition vraie **si au moins l'une des deux est vraie**. Elle se lit « ou ». Si aucune des deux est vraie, alors elle est fausse.

3.2 La négation logique

Elle se note $\neg P$, il s'agit d'une proposition vraie **uniquement quand P est fausse**, et elle est fausse quand P est vraie. C'est en quelque sorte l'opposé de P. Elle se lit « non ».

3.3 La conjonction logique

Elle se note $P \wedge Q$, il s'agit d'une proposition vraie **uniquement quand P et Q sont vraies**. **Dans TOUS les autres cas elle est fausse**. Elle se lit « et ».

3.4 L'implication logique

Elle se note $P \Rightarrow Q$, elle n'a pas de valeur véridique concrète. Elle est **fausse si P est vraie alors que Q est fausse**. Elle signifie que, **si P est vraie, alors Q est vraie aussi**, dans le cas où P est fausse, on n'a aucune information sur la vérité de Q. Elle se lit « implique » ou « si,... alors ».

3.5 L'équivalence logique

A ne pas confondre avec **la relation d'équivalence**, elle se note $P \Leftrightarrow Q$. Elle signifie que P est vraie quand Q est vraie, et que P est fausse quand Q est fausse. Elle se lit « est équivaut à » ou « si et seulement si ».